

ΘΕΜΑ 1

α) Σωστό ή Λάθος, αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας

- Σε υλικό σημείο i , συστήματος N υλικών σημείων, δεν επιδρούν οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.
- Αν x_0 είναι ένα σημείο ισορροπίας κατά την κίνηση υλικού σημείου A , τότε το δυναμικό παρουσιάζει στο x_0 ακρότατο ή σημείο καμψής.
- Όταν η δύναμη \vec{F} είναι συντηρητική, το έργο της δεν εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση του υλικού σημείου αλλά μόνο από το δρόμο που θα ακολουθήσει.
- Σύστημα λέγεται κλειστό όταν το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό είναι μηδέν.
- Η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή όταν η ολική ροπή του συστήματος είναι μηδέν.
- Το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας, υλικού σημείου P , επί του οποίου ασκείται συνισταμένη δύναμη \vec{F} , διατηρείται σταθερό.

β) Σε υλικό σημείο μάζας, $m=1 \text{ kg}$, ασκείται δύναμη $F(x) = -kx + ax^3$ με $k > 0$ και $a > 0$. (i) Να γραφεί η διαφορική εξίσωση κίνησης για το υλικό σημείο. (ii) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της κίνησης του και να μελετηθούν. (iii) Να βρεθεί το δυναμικό της $F(x)$ και να παρασταθεί γραφικά για $k = a = 1$ και $V(0) = 1$

ΘΕΜΑ 2

α) Αν η ταχύτητα υλικού σημείου, P, σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι: $\vec{u} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{z}_0$, να βρεθεί το διάνυσμα της επιτάχυνσης, \vec{a} , σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

β) Υλικό σημείο μάζας $m = 2 \text{ kg}$, κινείται στο Oxy επίπεδο υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = 4x\vec{x}_0 - 6y\vec{y}_0$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο έχει διάνυσμα ταχύτητας: $\dot{\vec{r}}_0 = 3\vec{x}_0 + 5\vec{y}_0$. (i)

Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου. (ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή

ΘΕΜΑ 3

α) Να υπολογίσετε το δυναμικό κεντρικής δύναμης της μορφής $\vec{F} = F(r)\vec{r}_0$

β) Δίσκος κέντρου O περιστρέφεται δεξιόστροφα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω γύρω από τον άξονα Z του σταθερού συστήματος $Oxyz$. Κατά μήκος μιας ακτίνας του δίσκου κινείται υλικό σημείο, P, του οποίου η απόσταση από το κέντρο του δίσκου δίνεται από τη σχέση $a + \beta \cos kt$, με $\alpha, \beta, k = \text{σταθερές}$. Να υπολογιστεί η απόλυτη επιτάχυνση του υλικού σημείου συναρτήσει του χρόνου, ως προς το αδρανειακό σύστημα αξόνων του οποίου η αρχή είναι το σταθερό σημείο O,

σχήμα 1. Η απόλυτη επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση: $\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{a}_P + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{u}_P) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$, όπου \vec{a}_O είναι η απόλυτη επιτάχυνση της αρχής O', \vec{a}_P η σχετική επιτάχυνση του P, $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα, $\dot{\vec{\omega}}$ η γωνιακή επιτάχυνση, \vec{r}' το διάνυσμα θέσης ως προς το κινούμενο σύστημα και \vec{u}_P η σχετική ταχύτητα του P.

ΘΕΜΑ 4

α) Να δειχθεί ότι σε κλειστό σύστημα N υλικών σημείων: (i) η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή και (ii) το κέντρο μάζας του κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ή είναι ακίνητο.

Είναι γνωστό ότι: $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = M \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$, M είναι η μάζα του συστήματος, \vec{r}_s το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος

β) Δίνεται η ομογενής επίπεδη επιφάνεια, **σχήμα 2**, με όρια $y = 0$, $x = 0$ και $y = 1 - x^3$. Να προσδιοριστούν: (i) η μάζα της ομογενούς επιφάνειας ως συνάρτηση της πυκνότητας ρ και (ii) το διάνυσμα θέσης, \vec{r}_s του κέντρου μάζας της επιφάνειας.